Carlo Felice Manara

L'eguaglianza in geometria. 1

Apparentemente semplice, il concetto di «figure eguali» non manca di suscitare dibattiti e problemi che portano a discutere degli stessi fondamenti della geometria.

«... condizione perché due oggetti siano uguali è ... che essi siano diversi...».

O. Chisini [4]

Quando si affronta lo studio della geometria, il concetto di «figure uguali» è uno di quelli che si presentano come fondamentali. Esso anche ci appare, a prima vista, come del tutto chiaro; di conseguenza, l'impiego di questo concetto nella geometria ci si presenta come il trasferimento, in questa scienza, di una abitudine di linguaggio che noi pratichiamo quotidianamente e che — a prima vista — non ci presenta particolari difficoltà, anzi ci appare del tutto legittima.
Tuttavia, quando si cerca di precisare questo concetto, e di codificare in modo rigoroso l'impiego del termine corrispondente, si incontrano ben presto, alcune difficoltà, le quali ci convincono della opportunità, se non addirittura della necessità, di una riflessione e di una analisi critica. Il che giustifica, a nostro parere, il fatto che filosofi, logici e matematici abbiano discusso e meditato su questo argomento.

Pensiamo che, nel presentare brevemente e sommariamente quello che a noi appare lo stato della questione, sia utile richiamare l'atteggiamento che si incontra nel primo trattato scientifico che la storia ricordi, e precisamente negli *Elementi* di Euclide.
Come è noto, Euclide tratta in modo esplicito della relazione di uguaglianza nelle *Nozioni comuni* del Libro I, che sono presentate nella forma seguente:

1 - *«(Due) cose che sono uguali ad una terza sono uguali tra loro».*

2 - *«Se cose uguali sono aggiunte a cose uguali, i risultati sono uguali».*

3 - *«Se cose uguali sono sottratte da cose uguali, i risultati (rimanenti) sono uguali».*

4 - *«Cose che coincidono sono uguali tra loro».*

5 - *«Il tutto è maggiore della parte».*

Tuttavia Euclide aveva già parlato di uguaglianza prima di questi enunciati, per esempio nel Postulato 4 che suona: «(si postula che) *tutti gli angoli retti sono uguali tra loro*».
È noto che sono stati elevati dubbi sulla autenticità della attribuzione ad Euclide delle nozioni comuni [15].
Noi non vogliamo entrare qui nella discussione specialistica che divide i dotti e gli storici, perché il nostro scopo, prevalentemente didattico, esclude la opportunità di questi approfondimenti. Ma resta tuttavia il fatto che il concetto di uguaglianza fonda tutta la geometria, nella concezione classica.
A proposito della nozione comune 4, riportiamo qui il commento che ne dà T. L. Heath: *«It seems clear that the Common Notion as here formulated, is intendend to assert that superposition is a legitimate way of proving the equality of two figures which have the necessary parts respectively equal, or, in other words, to serve as an axiom of congruence»* (pag. 225 [5, vol. 1]).
E prosegue ad esporre il proprio parere, osservando che questo procedimento è fondamentale nella dimostrazione delle proposizioni 4 ed 8 del Libro I degli Elementi. In queste due proposizioni Euclide dimostra che due triangoli sono uguali quando sono soddisfatte le ipotesi che oggi comunemente vengono richiamate sotto i nomi di «primo» e «terzo» criterio di uguaglianza dei triangoli. Precisamente la proposizione 4 riguarda due triangoli che hanno uguali due coppie di lati e l'angolo compreso tra essi, la 8 riguarda due triangoli che hanno uguali rispettivamente i tre lati. In entrambi i casi l'argomentazione fa implicitamente appello alla operazione di portare una delle figure a sovrapporsi all'altra.
Pertanto pensiamo che si possa dire tranquillamente che, per Euclide, la relazione di «uguaglianza» è più estesa della relazione di coincidenza, come si può dedurre dalla nozione comune 4, in cui si fa esplicita distinzione tra l'una e l'altra, e come si può dedurre dalla proposizione 35 del Libro I, in cui si dimostra che due parallelogrammi che hanno la medesima base e sono compresi tra due stesse rette parallele sono «uguali». E qui, ovviamente, l'uguaglianza non indica la possibilità di sovrapposizione, ma quella che noi chiamiamo uguaglianza di area, o anche — con altri termini — equivalenza; siamo quindi di fronte ad una relazione per la quale, intuitivamente, sono valide le nozioni comuni, ma la cui sussistenza non si verifica con la sola operazione di sovrapposizione.

Abbiamo detto poco sopra che in Euclide è chiaramente fatta la distinzione tra la relazione geometrica di uguaglianza tra due figure e la coincidenza; pertanto vorremmo osservare che alla uguaglianza geometrica sono difficilmente applicabili le considerazioni sulla identità, che è stata precisata da filosofi e logici.
Ricordiamo per esempio ciò che scrive S. Tommaso d'Aquino, ripetendo quasi alla lettera le parole di Aristotele [1, i]: *«Quaecumque sunt idem, ita se habent, quod quidquid praedicatur de uno, praedicatur et de alio».*
Frase che è stata tradotta da I. M. Bochenski nella forma: *«Due cose sono identiche, quando tutti i predicati che convengono all'una convengono anche all'altra e viceversa»* [3].
E G. W. Leibnitz scrive: *«Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate».*
E G. Peano scrive: *«... due oggetti sono identici se ogni proprietà di uno è anche proprietà dell'altro»* [12, i] (abbiamo qui tradotto in italiano l'enunciato che Peano presenta nella lingua artificiale, che egli desiderava far entrare nell'uso della comunità scientifica e che aveva chiamato *«Interlingua»* o anche *«Latino sine flexione»*).
Questi enunciati possono essere tradotti con i simboli della logica matematica odierna. Per esempio, E. Mendelson introduce la scrittura:

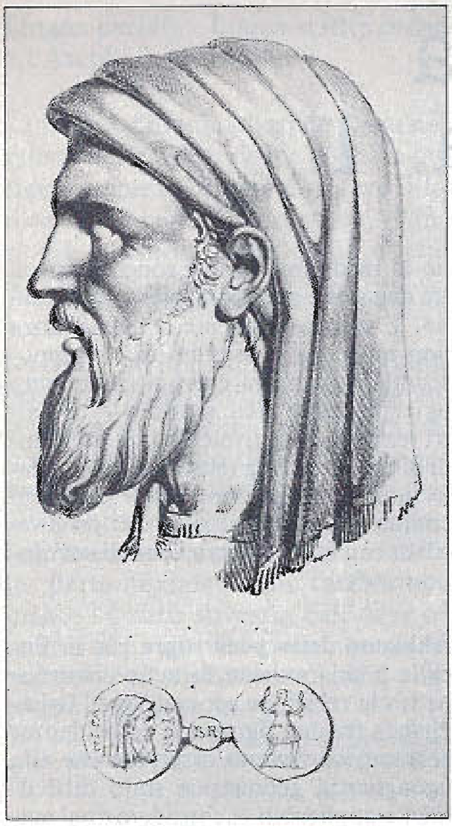
(1) $t = s$

come abbreviazione del simbolo:

(2) $A_1^2\ (t,\ s)$

essendo A_1^2 una lettera predicativa.
E la relazione (1) viene chiamata *identità* quando soddisfa ai seguenti teoremi:

(3) $(x)\ (x = x)$ (riflessività dell'identità)



Euclide (sec. III a.C.).

(4) $$x = y \supset (\mathscr{A}(x,x) \supset \mathscr{A}(x,y))$$ (sostitutività dell'identità)

dove x, y sono variabili qualsiasi, $\mathscr{A}(x,x)$ è una formula ben formata qualsiasi [9].
Pare tuttavia che questi enunciati debbano essere intesi con qualche precisazione; scrive per esempio G. Peano: «*La scrittura* a = b, *ove* a *e* b *siano individui, indica la loro identità, ovvero che* a *e* b *sono due nomi dati ad uno stesso individuo. Se* a *e* b *sono classi, quella scrittura indica che le due classi coincidono, ossia che ogni* a *è* b *e viceversa*». [12, ii].
Ed in un altro luogo osserva: «*Non ci possono essere due enti aventi tutte le stesse proprietà. Così nell'eguaglianza 2 = 2, il primo 2 sta a sinistra e il secondo a destra del segno =, perciò hanno proprietà differenti. Quindi, nella definizione di uguaglianza, alla parola proprietà bisogna attribuire un senso stretto; ovvero, attribuendo a questa parola il senso largo che ha, conviene distinguere fra proprietà reali e proprietà formali*» [12, iii].
E poco sotto precisa con un esempio che cosa intende indicare parlando di proprietà reali e proprietà formali, cioè proprietà soltanto della «*...forma speciale con cui* ...» l'ente viene presentato.

A nostro parere un atteggiamento abbastanza analogo è tenuto da G. Veronese. Questo autore, dopo avere enunciato il «*principio di identità*» nella forma: «*Il concetto* A *è il concetto* A» aggiunge: «*Se* A *e* B *rappresentano un solo concetto* c, *il concetto* c *rappresentato da* A *è il concetto* c *rappresentato da* B» ed aggiunge a pié di pagina: «*Si badi che non è il segno* A *uguale al segno* B, *ma il concetto rappresentato da* A *che è il concetto rappresentato da* B».
E varie righe dopo egli si esprime dicendo: «*La proposizione: la cosa* A *è uguale alla cosa* B *significa: il concetto della cosa* A *è il concetto della cosa* B» [17].
Vorremmo osservare che gli enunciati precedenti, che si riferiscono alla relazione di identità, mal si prestano ad essere applicati alla relazione di uguaglianza tra figure geometriche. Per esempio, se facciamo riferimento alla frase di Leibnitz citata sopra, a prima vista può apparire chiaro che cosa si intende dire, affermando che una cosa può essere sostituita ad un'altra senza che la verità ne soffra. Ma una ulteriore riflessione potrebbe ingenerare qualche perplessità, a proposito della operazione di sostituzione.
Infatti, in linea di principio, essa potrebbe venir eseguita in molti modi: tra l'altro si potrebbe pensare ad una sostituzione che avviene con il trasporto rigido di una figura da una posizione ad un'altra, secondo la interpretazione che alcuni autori danno del pensiero di Euclide. Ma si può anche pensare che questo modo di interpretare la sostituzione non sia l'unico possibile.
D'altra parte non ci pare sostenibile la opinione di B. Russel (Cfr. [5], Vol. 1) secondo il quale la verifica della uguaglianza di due figure non richiede di far riferimento ad un possibile spostamento materiale di queste ma semplicemente allo spostamento dell'attenzione dall'una all'altra. Infatti questo spostamento di attenzione dovrebbe avere, a nostro parere, il suo fondamento in una esperienza sensibile, anche se non in una operazione materiale; e questa esperienza sarebbe quindi sottoposta alle fallacie dei nostri sensi, fallacie che possono inquinare la trattazione dei rapporti puramente logici.
Per parte nostra, riteniamo di poter essere d'accordo con la opinione di Schopenhauer, il quale osserva che questo appello alla sovrapposizione, con il quale Euclide giustifica le proposizioni 4 e 8 del Libro I, porta il ragionamento ad uscire dal dominio dello spazio puro, che è l'oggetto della geometria, per entrare nel dominio del materiale ed empirico.
Abbiamo detto che condividiamo questa opinione, anche se non siamo d'accordo nel pensare che il dominio della geometria sia lo «spazio puro». Ritorneremo in seguito su questo argomento, e ci limitiamo qui a ricordare la osservazione di Heath, secondo il quale pare che Euclide non abbia molta simpatia per questo metodo di dimostrazione che fa ricorso alla sovrapposizione; ma lo stesso Heath aggiunge che tale metodo si presenta come fondamentale per la geometria euclidea. Per parte nostra vorremmo aggiungere che non consideriamo questo un metodo di *dimostrazione*, ma di *constatazione* del sussistere di una certa relazione che viene accettata come nota dalla intuizione o dalla esperienza concreta, elaborata dalla fantasia e concettualizzata.

Cercando di riassumere, almeno provvisoriamente, ciò che è stato esposto fin qui, vorremmo dire che, dal punto di vista della logica, ci si può domandare se questa relazione di uguaglianza fra figure, che appare a prima vista immediata e chiara, non possa essere definita in modo rigoroso, facendo ricorso a delle idee più semplici. Ovviamente la scelta di queste non è imposta in modo imperativo dalla logica; ma possiamo aggiungere che, alla luce della critica moderna, la scelta delle idee primitive reca con sè la necessità di definire queste idee con sistemi di assiomi, e non consente più di accettare la loro acquisizione in forza di una non determinata «intuizione» geometrica.
Se poi vogliamo lasciare il campo della logica pura e delle sue esigenze, pensiamo che si possa domandarsi se abbia senso condurre avanti una analisi psicologica, una ricerca, almeno approssimata e rudimentale, dei fondamenti sperimentali, delle immagini formate in seguito alle sensazioni immediate, che possono condurre a concepire questa relazione.
Si potrebbe pensare ad una relazione che ha il suo fondamento psicologico soltanto nell'organo della vista; ma, nella concezione abituale del termine di uguaglianza, si suole pensare che questo abbia senso anche per figure che siano «apparentemente» diverse, perché, per esempio, l'una è più vicina a noi dell'altra. Si tratta quindi di una relazione che coinvolge delle operazioni e delle sensazioni che sono più composite e complicate di quelle affidate alla sola vista.
Potremmo allora pensare di fare riferimento alle operazioni di manipolazione e trasporto dei corpi rigidi che conducono alla verifica di sovrapponibilità di due figure; operazione questa che potrebbe essere concepita in due modi, apparentemente poco dissimili, ma logicamente molto diversi. Un modo di concepire questa operazione di sovrapposizione potrebbe portare a pensare che essa è destinata soltanto a *verificare* il sussistere o meno della relazione di uguaglianza, che invece è concepita per conto suo, in modo indipendente dalla operazione. Un secondo modo porterebbe invece a pensare che la operazione di trasporto venga a *costituire* la relazione; in questo secondo atteggiamento quindi la relazione di uguaglianza sarebbe fondata sulla possibilità o meno di seguire una certa operazione.
Questa breve analisi potrebbe essere considerata abbastanza semplice ed ad-

dirittura banale, ma essa fonda, a nostro parere, gli atteggiamenti che si sono presentati durante la storia nei riguardi di un concetto così fondamentale per tutta la geometria, e pensiamo, anche per tutta la matematica.

Non ci è possibile dare qui un resoconto completo delle discussioni che sono state fatte attorno a questo argomento; per informazioni più complete di quelle che abbiamo dato qui rimandiamo il lettore per esempio all'articolo di P. Benedetti [2], il quale ha dedicato a questa questione un capitolo dell'articolo *Fondamenti di geometria* da lui scritto in *Enciclopedia delle Matematiche elementari* (Vol. II, parte I, Milano, 1937), oppure all'opera di T. L. Heath, già citata, in particolare al commento che l'autore dedica alla nozione comune n. 4 [5].

Carlo Felice Manara

BIBLIOGRAFIA

[1] ARISTOTELE. i) *Topica,* libro VII, Cap. I, 15.
ii) *Metaph.* 4, 4.

[2] BENEDETTI, PIERO, *Fondamenti di geometria,* in L. BERZOLARI, G. VIVANTI, D. GIGLI, *Enciclopedia delle matematiche elementari,* Milano, 1937, Vol. II, Parte I.

[3] BOCHENSKI, INNOCENZO M., *Nove lezioni di logica simbolica, Lezione VIII,* Roma, 1938.

[4] CHISINI, OSCAR, *Discorso sull'uguaglianza.* «Rend. Sem. Mat.» Milano, Vol. XIV, 1940.

[5] HEATH, THOMAS L., *The thirteen books of Euclid's elements,* New York, 1956.

[6] HELMHOLTZ, HERMANN LUDWIG, FERDINAND VON, *Ueber die tatsachlichen Grundlagen der Geometrie.* Wiss. Abhandl. Leipzig., 1882.
Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. Ibid.

[7] HILBERT, DAVID, *Fondamenti della geometria,* Milano, 1970.

[8] KLEIN, FELIX, *Vergleichende Betrachtugen über neuere geometrische Forschungen,* Göttingen, 1878. Tradotto in italiano con il titolo: *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti,* «Annali di Mat.», 1981.

[9] MENDELSON, ELLIOT, *Introduzione alla logica matematica,* Torino, 1972, Cap. 2.

[10] PADOA, ALESSANDRO, *Dell'astrazione matematica. Questioni filosofiche,* 1908.

[11] PASCAL, BLAISE, *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader.*

[12] PEANO, GIUSEPPE, i) *Formulario matematico,* Torino, 1908, pag. 8.
ii) *Principi di logica matematica, Opere scelte,* Roma, 1858. Vol. II (31).
iii) *Eguale, Opere scelte,* Roma, 1858, Vol. II (1984).
iiii) *I principi di geometria logicamente esposti - Opere scelte,* Roma, 1858, vol. II (18).

[13] PIERI, MARIO, *Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo. Monografia del punto e del moto.* 1898-99.

[14] STAUDT, GEORG KARL K. VON - *Geometrie der Lage.*

[15] TANNERY, PAUL, *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide.* «Bull. soc. math. et astr» 1884.

[16] TOMMASO D'AQUINO, *Summa Theologica,* Pars I, Quaestio XL, art, 1, 3.

[17] VERONESE, GIUSEPPE, *Fondamenti di geometria. Introduzione,* Cap. I Padova, 1891.